¿Es cierto ...
que las matemáticas son incompletas?

Dependencia: Centro de Ciencias Matemáticas. UNAM

Autor: Osvaldo Guzmán y Michael Hrušák.

"El universo no se puede comprender hasta que hayamos aprendido el idioma y nos familiaricemos con los caracteres en los que está escrito. Está escrito en lenguaje matemático y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es humanamente imposible comprender una sola palabra."

Galileo Galilei

Las matemáticas se consideran la base sólida e irrefutable de la ciencia. Grandes teorías, como la *física cuántica* y la *teoría de la relatividad general* de Einstein (los dos pilares que sustentan la física moderna) están basadas firmemente en las matemáticas. Por esto es indispensable asegurarnos que las matemáticas estén bien fundamentadas, pues de otra manera, toda teoría que las use terminará por derrumbarse, al igual que un gran edificio con cimientos débiles.

Hasta finales del siglo XIX, las matemáticas dependían fuertemente de la intuición y usaban argumentos apelando a esta, los cuales hoy en día no serían aceptados por su falta de rigor. Un claro ejemplo es la manera informal en la que Leibniz y Newton utilizaban los *infinitesimales* (números infinitamente pequeños) para encontrar derivadas e integrales. Resultados como la existencia de infinitos de distinto tamaño de Cantor o la existencia de una curva que llena el espacio de Peano, llevaron a los matemáticos a replantearse la forma de ver y acercarse a las matemáticas. Más aún, la aparición de paradojas en la teoría de conjuntos hizo evidente que era necesario encontrar una base firme para fundamentar las matemáticas. En particular la llamada **Paradoja de Russell:***Sea R el conjunto de todos los conjuntos que no se pertenecen a sí mismos. ¿R se pertenece a sí mismo?* puso en evidencia la profundidad de la crisis de las matemáticas del momento.

La salida la ofreció el *método axiomático* (el cual ya había sido usado exitosamente por Euclides para el desarrollo riguroso de la geometría unos dos mil años antes en el influyente libro "*Los Elementos*"). El método consiste en fijar un conjunto de verdades básicas llamadas *axiomas* o *postulados* y reglas válidas de inferencia. Es entonces que todo resultado (*teorema*) debe poderse demostrar a partir de los axiomas de manera lógica aplicando las reglas de inferencia. Las propiedades más importantes que deseamos en un sistema axiomático son las siguientes:

1.Consistencia. *Un sistema axiomático es consistente si a partir de él no se pueden derivar contradicciones.*

2.Completud. *Un sistema axiomático es completo si todo enunciado o su negación pueden demostrarse*. Es decir, el sistema es lo suficientemente poderoso para decidir cualquier enunciado de la teoría.

El campeón de este método fue David Hilbert, que tenía un sueño conocido como el *Programa de Hilbert* de encontrar una axiomatización completa y consistente de todas las verdades de las matemáticas. Al principio el método axiomático tuvo un enorme éxito (como son la axiomatización de la geometría por parte de Hilbert y Tarski), pero el sueño de Hilbert llegó a su triste fin el fatídico día del año 1930 en el que Kurt Gödel enunció su "teorema de incompletud":

David Hilbert. Fuente: Wikipedia.

Teorema de Gödel: *Todo sistema axiomático* ***comprensible****, consistente, y suficientemente poderoso para desarrollar la aritmética es, necesariamente incompleto.*

Tenemos que aclarar unos puntos en el teorema anterior. Por aritmética nos referimos al estudio de los números naturales N = {0,1,2,3...} con las operaciones de suma, multiplicación y exponenciación. Por *comprensible* nos referimos a que existe una receta o algoritmo que permite listar los axiomas del sistema (dicha propiedad se conoce formalmente como *decidible* o *recursivo*). En particular, todo sistema con una cantidad finita de axiomas es comprensible en este sentido.

Kurt Gödel. Fuente: Wikipedia.

En otras palabras, el teorema afirma que, dado un sistema consistente, comprensible y suficientemente fuerte, podemos encontrar un enunciado no decidido por nuestros axiomas, es decir, ni él ni su negación se pueden demostrar. Por supuesto, podríamos añadir este enunciado a los axiomas, pero el teorema de Gödel nos garantiza que otro enunciado i*ndecidible* aparecerá. De este modo, las matemáticas **sí son un sustento sólido para la ciencia**, pero **de ninguna manera es completo**. Es la *Teoría de Conjuntos* la disciplina que se encarga de identificar y delimitar los fenómenos de independencia en las matemáticas, pero esto ya es para otro relato.